Πρόταση (Κριτήριο Αβελιανής ομάδας):
Ας είναι G μία ομάδα.
Εάν για τρεις τυχαίους διαδοχικούς ακεραίους i ισχύει ότι:
$(\forall a, b \in G): (ab)^i = a^i b^i$, τότε
να αποδείξετε ότι η G είναι αβελιανή

Απόδειξη

Έστω i, $i+1$, $i+2$ τρεις διαδοχικοί ακέραιοι

$(ab)^{i+2} \overset{\text{Υποθ}}{=} a^{i+2} \cdot b^{i+2} = a(a^{i+1} b^{i+1}) b \overset{\text{Υποθ}}{=} a(ab)^{i+1} \cdot b =$
$= a \cdot (ab)^i (ab) b = a a^i b^i \cdot a \cdot bb$ ①

Από την άλλη μεριά

$(ab)^{i+2} = (ab)^{i+1} \cdot (ab) \overset{\text{Υποθ}}{=} a^{i+1} \cdot b^{i+1} \cdot a b$ ②

Εξισώνουμε τις ① και ②:

$a \cdot a^i b^i a b \cdot b = a^{i+1} b^{i+1} \cdot a \cdot b \Leftrightarrow$

$\cancel{(a^{i+1})^{-1} \cdot a \cdot a^i} \cdot b^i \cdot a \cdot b \cdot b = \cancel{(a^{i+1})^{-1} \cdot a^{i+1}} \cdot b^{i+1} \cdot a \cdot b \Leftrightarrow$

$b^i a \cdot b \cdot \cancel{b} = b^{i+1} a \cdot \cancel{b} \Leftrightarrow$

$b^i a b = b^{i+1} a \Leftrightarrow$

$\cancel{b^i} a b = \cancel{b^i} \cdot b a \Leftrightarrow$

$ab = ba$

Άρα, η ομάδα G είναι αβελιανή

Πηγή:
www.pathtomathematics.blogspot.gr